

## 第十九届华罗庚金杯少年数学邀请赛

## 决赛试题 A 参考答案

## (小学高年级组)

## 一、填空题(每题 10 分,共 80 分)

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	B	14700	20	56.5	77	15	2	$4\frac{8}{13}$

## 二、解答下列各题(每题 10 分,共 40 分,要求写出简要过程)

## 9. 答案: 25

解答. 因为用 9 个相同的正方形纸片不可能摆出四层满足题目的图形, 可分下述七类讨论,

二层 8 加 1 型: 7 种;

二层 7 加 2 型: 5 种;

二层 6 加 3 型: 3 种;

二层 5 加 4 型: 1 种;

三层 6 加 2 加 1 型: 4 种;

三层 5 加 3 加 1 型: 4 种;

三层 4 加 3 加 2 型: 1 种.

共计 25 种不同的放置方法.

## 10. 答案: 10.7%

解答. 设杯子的容积为  $V$ , 则第一次将小球沉入杯中, 盐水溢出  $\frac{V}{10}$ , 即小铁球的体积是  $\frac{V}{10}$ . 由于小球、中球、大球的体积之比为 3:4:10, 所以中球的体积是

$$\frac{\frac{V}{10} \times 4}{3} = \frac{2V}{15},$$

大球的体积为

$$\frac{\frac{V}{10} \times 10}{3} = \frac{V}{3}.$$

沉入中球后溢出盐水的体积:

$$\frac{2V}{15} - \frac{V}{10} = \frac{V}{30},$$

沉入大球后溢出盐水的体积:

$$\frac{V}{3} - \frac{V}{10} - \frac{V}{30} = \frac{V}{5},$$

补充的纯水的体积:

$$\frac{V}{10} + \frac{V}{30} + \frac{V}{5} = \frac{V}{3}.$$

最终, 盐水的浓度为

$$\frac{\frac{2V}{3} \times \frac{16}{100}}{V} \% \approx 10.7%.$$

### 11. 答案: 216

**解答.** 记原车速为  $v_0$ , 以速度  $v_0$  走全程的时间为  $t_0$ ; 第一种提速情形时提速后的速度为  $v_1$ , 提速后到达目的地用时为  $t_1$ ; 第二种提速情形时提速后的速度为  $v_2$ , 提速后到达目的地用时为  $t_2$ . 则

$$v_0 : v_1 = 1 : \left(1 + \frac{1}{5}\right) = 5 : 6, \quad (t_0 - 1) : t_1 = 6 : 5.$$

又

$$t_0 - 1 = t_1 + 20 \div 60,$$

所以,

$$t_0 = 1 + 6 \times 20 \div 60 = 3 \text{ (小时)}.$$

类似地,

$$v_0 : v_2 = 1 : \left(1 + \frac{1}{3}\right) = 3 : 4, \quad \left(t_0 - \frac{72}{v_0}\right) : t_2 = 4 : 3.$$

又

$$t_0 - \frac{72}{v_0} = t_2 + 30 \div 60,$$

所以

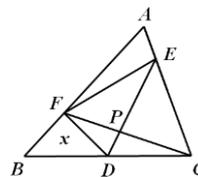
$$v_0 = 72 \text{ (千米/小时)}.$$

全程的路长为

$$72 \times 3 = 216 \text{ (千米)}.$$

**12. 答案: 3**

**解答.** 如右图所示, 连接  $EF, DF$ . 设  $S_{\triangle BDF} = x$ . 因为  $D$  为  $BC$  的中点, 所以  $S_{\triangle FDC} = x$ ,  $S_{\triangle CFB} = 2x$ .



因为  $AF = 2BF$ , 所以  $\frac{S_{\triangle CAF}}{S_{\triangle CFB}} = \frac{AF}{BF} = 2$ , 得  $S_{\triangle CAF} = 4x$ .

因为  $\frac{S_{\triangle AFE}}{S_{\triangle EFC}} = \frac{AE}{CE} = \frac{1}{3}$ , 所以  $S_{\triangle EFC} = 3x$ .

因为  $\frac{S_{\triangle EFP}}{S_{\triangle DPF}} = \frac{S_{\triangle CEP}}{S_{\triangle CPD}} = \frac{PE}{DP}$ , 所以  $\frac{PE}{DP} = \frac{S_{\triangle EFC}}{S_{\triangle FDC}} = 3$ .

**三、解答下列各题 (每题 15 分, 共 30 分, 要求写出详细过程)**

**13. 【答案】 1679**

**【解答】** 首先考察下面 335 对数

$$\{k, 5k\}, k=1 \sim 4, 6 \sim 9, 11 \sim 14, 16, 81 \sim 402,$$

共有 670 个数. 从 2014 个数中去掉它们, 还剩 1344 个数. 将这些数单独 1 个成组, 共得到 1679 组数. 如果  $1679 < n$ , 必有 2 数取自同一组, 这两数是 5 倍关系. 所以  $n \leq 1679$ .

另一方面, 选取

$$\{1 \sim 3, 17 \sim 80, 403 \sim 2014\},$$

共有 1679 个数, 这些数中任意两个都不是 5 倍关系.

综上,  $n$  的最大值为 1679.

**14. 答案:** 10, 18, 19

**解答.** 四位数与三位数的差为 2, 只可能有两种情况:

$$2 = 1000 - 998 = 1001 - 999.$$

所以

$$\overline{a6b} + \overline{4cd} = 1000 \quad \text{或} \quad \overline{a6b} + \overline{4cd} = 1001.$$

当  $\overline{a6b} + \overline{4cd} = 1000$  时, 因为  $b, d$  代表不同的数字, 所以  $b+d=10$ . 此时  $6+c=9$ , 得  $c=3$ . 因而,  $a+4=9$ , 得  $a=5$ . 这样就有,  $a+b+c+d=18$ .

当  $\overline{a6b} + \overline{4cd} = 1001$  时,  $b+d=1$  或  $b+d=11$ .

1) 若  $b+d=1$ , 则  $6+c=10$ , 即  $c=4$ . 所以  $a+4=9$ , 得  $a=5$ . 这种情况下,  $a+b+c+d=10$ .

2) 若  $b+d=11$ , 则  $6+c=9$ , 即  $c=3$ . 所以  $a+4=9$ , 得  $a=6$ . 这种情况下,  $a+b+c+d=19$ .