第十一屆“華羅庚金杯”少年數學邀請賽澳門區決賽

決賽試題參考答案　（小學高年級組）

一、填空題（每題 10 分，共 80 分）

題號	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	43.5	13	106	122	7	9421, 1249	$\frac{11}{135}$	4

二、解答下列各題（每題 10 分，共 40 分，要求寫出簡要過程）

9. **答案:** 不能

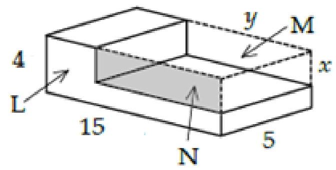
解答. 對於 1234567891011 以及交換其某兩位得到的數，它們的各位數字之和都為

$$1+2+3+\cdots+9+1+0+1+1=48.$$

因此它們是 3 的倍數到不是 9 的倍數，都不可能是完全平方數.

10. 答案: 3, 12

解答. 將“L”形物體補上立方體 M 後，整個長方體體積為



$$15\times5\times4=300,$$

那麼 M 的體積為

$$300-120=180.$$

側面 N 的的面積為

$$180\div5=36.$$

又

$$36=1\times36=2\times18=3\times12=4\times9=6\times6,$$

只有 x, y 分別為 3, 12 符合題意.

11. 答案: 5

解答. 根據題意, 甲與乙的速度之比為$23:13$. 設跑道的長度為 2015, 甲的速度為 $23m$, 乙的速度為 $13m$, 第 k 次甲追上乙的時刻為 t, 則有:

$$(23-13)\times mt=2015k\,,\ \left(k=1,2,\cdots,10\right),\ t=\frac{2015}{10m}k=\frac{403}{2m}k\,.$$

甲追上乙時, 甲跑的距離是:

$$23m\times\frac{2015}{10m}k=\frac{23\times 403}{2}k\,.$$

按題意, $k\le 10$, 且當 $k=2, 4, 6, 8, 10$時, 甲跑的距離是整數, 5個追及點分別在5個旗子處.

12. 答案: 8

解答. 由兩人的得分總和都是 31 分的條件可知: 贏者勝兩局負一局.

設贏者三局得分分別為 x_1, x_2, x_3, 負者三局比分為 y_1, y_2, y_3, 則

$$x_1+x_2+x_3=31,\ \ y_1+y_2+y_3=31,$$

且 $x_1, x_3\ge 11$, $x_2\le 9$, $y_2=11$,

$$y_1+y_3=20. \qquad (*)$$

首先, $x_2\ne 9$. 否則, $x_1=x_3=11$, 因為 $y_1, y_3\le 9$, $(*)$不成立. 所以, $x_2\le 8$.

其次, $x_2\ne 8$. 否則, x_1, x_3只能一個是11, 另一個為12, 此時, $y_1+y_3\le 19$, $(*)$不成立. 所以, $x_2<8$.

當 $x_2<8$時, 其它兩局的得分可以是

$$x_1=11,\ \ x_3=20-x_2,\ \ y_1=2+x_2,\ \ y_3=18-x_2,$$

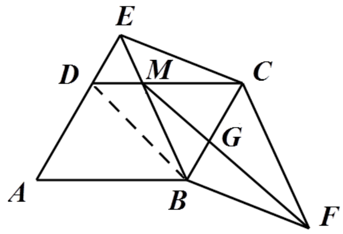
滿足$(*)$式.

所以, 第二局的比分共有 8 種情況, 分別為 11:0 到 11:7 .

三、解答下列各題（每題 15 分, 共 30 分, 要求寫出詳細過程）

13. 答案: 60 cm^2

解答. 設 $S_{\Delta EDM}=x$. 因為 $DM:MC=1:2$, 所以 $S_{\Delta EMC}=2x$. 連接 BD. 因為 $AD//BC$, 所



以 $S_{\Delta DBM} = S_{\Delta EMC} = 2x$. 進而

$$EM : MB = S_{\Delta EDM} : S_{\Delta DBM} == 1:2.$$

所以

$$S_{\Delta BCM} = 4x,\ S_{\Delta CBF} = S_{\Delta BCM} + S_{\Delta CEM} = 6x.$$

由 $BM // FC$ 得 $S_{\Delta MGC} = S_{\Delta FGB}$, 所以

$$\frac{CG}{GB} = \frac{S_{\Delta FCM}}{S_{\Delta MBF}} = \frac{S_{\Delta MGC} + S_{\Delta FCG}}{S_{\Delta MBG} + S_{\Delta FGB}} = \frac{S_{\Delta FGB} + S_{\Delta FCG}}{S_{\Delta MBG} + S_{\Delta MGC}} = \frac{S_{\Delta CBF}}{S_{\Delta BCM}} = \frac{3}{2}.$$

因為

$$\frac{S_{\Delta FCG}}{S_{\Delta FGB}} = \frac{CG}{GB} = \frac{3}{2},$$

所以

$$S_{\Delta FCG} = \frac{3}{5} S_{\Delta CBF} = \frac{18}{5} x.$$

因為三角形 FCG 的面積與三角形 MED 的面積之差為 $13\,\text{cm}^2$, 所以

$$\frac{18}{5} x - x = 13,$$

解得 $x = 5$. 最終得

$$S_{\Delta EBC} = 6x = 30 \quad (\text{cm}^2),$$

$$S_{ABCD} = 2S_{\Delta EBC} = 60 \quad (\text{cm}^2).$$

14. 答案: 8

解答. 在這四個成語裡, 五個漢字“一”、“言”、“行”、“舉”和“知”都出現兩次. 因為 5 個不同的非零自然數之和最小的兩個為 15, 20, 11 個連續非零自然數之和最小的兩個為 66, 77, 因此這 11 個連續自然數只可能為 1 至 11.

因為 66 加上“一”、“言”、“行”、“舉”與“知”所代表的數之和為 84, 所以

$$\text{“一”} + \text{“言”} + \text{“行”} + \text{“举”} + \text{“知”} = 18. \qquad (*)$$

因為五個漢字所代表的數不可能全為偶數(否則其和等於 30)，它們之中有兩個奇數、三個偶數或者一個偶數、四個奇數.

對於兩個奇數，三個偶數的情形，可以斷定最小的奇數必為 1，否則，因為三個偶數之和大於等於 12，這樣 5 個數之和將不小於 20，不可能. 又因為另外一個奇數不可能大於 5，所以得出下列兩種情形，

情形 1): 1, 2, 3, 4, 8;

情形 2): 1, 2, 4, 5, 6.

對於一個偶數，四個奇數的情形. 因為四個奇數之和大於等於 16，“一”、“言”、“行”、“舉”與“知”所代表的數只有一種可能，

情形 3): 1, 2, 3, 5, 7.

在所有的情形下，“行”可能代表的數最大不會超過 8.

由(*) 式以及“言揚行舉”、“知行合一”兩個成語中的四個漢字所代表的數之和都是 21 得到

$$\text{“合”}+\text{“扬”}=24-\text{“行”}. \qquad (**)$$

當“行”為 8 時，由 (**) 得“合”與“揚”取自{11, 5}, {10, 6}或{9, 7}. 若取自{11,5}，則要將 1, 2, 3, 4 分成兩組，每組兩個數，一組的數之和是 2，另一組的為 8. 不可能. 當“合”與“揚”分別為 10 與 6 時，“舉”、“言”、“知”“一”分別為 1, 2, 4, 3, {“世”,“皆”}與{“之”,“家”}一組是{11, 5}，另一組的為{9, 7}. 當“合”與“揚”分別為 9 與 7 時，“舉”、“言”、“知”“一”分別為 1, 3, 4, 2, {“世”,“皆”}與{“之”,“家”}一組是{11, 5}，另一組的為{10, 6}.

綜上，“行”可以代表的數最大是 8.