

## 第十一屆“華羅庚金杯”少年數學邀請賽澳門區決賽

## 決賽試題參考答案（初一組）

## 一、填空（每題 10 分，共 80 分）

| 題號 | 1      | 2   | 3   | 4 | 5   | 6                              | 7   | 8     |
|----|--------|-----|-----|---|-----|--------------------------------|-----|-------|
| 答案 | 114686 | 210 | 5,7 | 4 | 673 | $76\frac{3}{4}, 10\frac{1}{2}$ | 135 | 34,16 |

## 二、解答下列各題（每題 10 分，共 40 分，要求寫出簡要過程）

9. 答案：0

解答：由於

$$\begin{aligned}
 & 1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times 2013 + 2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times 2014 \\
 &= 1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times 2013 + (2015 - 2013)(2015 - 2011)(2015 - 2009) \times \cdots \times (2015 - 1) \\
 &= 1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times 2013 + (-2013)(-2011)(-2009) \times \cdots \times (-1) + 2015 \times n \\
 &= 1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times 2013 \times [1 + (-1)^{1007}] + 2015 \times n \\
 &= 2015 \times n
 \end{aligned}$$

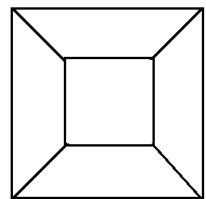
其中  $n$  為某整數，算式  $1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times 2013 + 2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times 2014$  的值被 2015 整

除後的餘數為 0.

10. 答案：（1）6，（2）4

解答：（1）共含有 6 個四邊形；

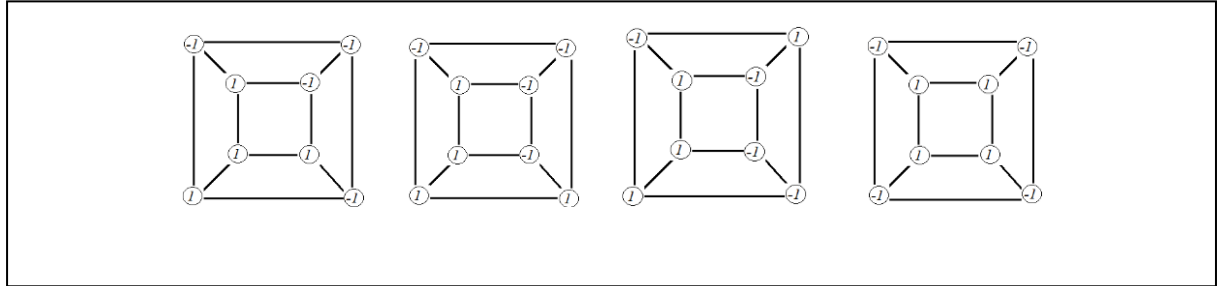
（2）至多有 4 個不同的和，分別是 6，2，-2 和 -6



稱四邊形 4 個頂點的積為“頂點積”，8 個頂點處所標的數記為

$x_i (i=1,2,3,4,5,6,7,8)$ ，其中有 4 個 1，4 個 -1，稱四邊形 4 個頂點的積為“頂點積”，只能是 1 或 -1. 將 6 個“頂點積”相乘，得： $(x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 x_7 x_8)^3 = 1$ ，說明 6 個“頂點積”中，積為 -1 的個數是偶數，可能的個數是 0, 2, 4 和 6，則 6 個“頂點積”的不同的和至多有 4 個，分別是 -6，-2，2 和 6.

能否有 4 個不同的和？下圖是 6 個“頂點積”的和分別是  $-6$ ， $-2$ ， $2$  和  $6$ ，其頂點處  $1$  和  $-1$  的放法。



11. 答案：288

解答：由題意知：

$$\begin{aligned}
 & b^2|c| - 2c^2|b| - 4(|b| - 2|c|) \\
 &= |b||bc| - |bc||2c| - 4(|b| - 2|c|) \\
 &= |bc|(|b| - |2c|) - 4(|b| - 2|c|) \\
 &= (|bc| - 4)(|b| - 2|c|) \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

因為  $b$  與  $c$  同號，且  $b \neq 2c$ ，故  $bc = 4$ 。由  $\frac{1}{b} + \frac{1}{c} - \frac{1}{a} = \frac{3}{4}$ ，得

$$ac + ab - bc = \frac{3}{4}abc = 3a. \quad (1)$$

由  $\frac{a}{bc} + \frac{b}{ac} + \frac{c}{ab} = \frac{3}{2}$ ，得

$$a^2 + b^2 + c^2 = \frac{3}{2}abc = 6a. \quad (2)$$

因為

$$(a - (b + c))^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2a(b + c) + 2bc \geq 0. \quad (3)$$

由 (1)，(2)，(3)，得

$$a = b + c.$$

由  $a^2 + b^2 + c^2 = 6(b + c)$ ，得到：

$$2(b + c)^2 - 2bc = 6(b + c),$$

即：

$$2(b+c)^2 - 8 - 6(b+c) = 0, (b+c)^2 - 3(b+c) - 4 = 0,$$

由此得

$$\begin{cases} b+c=4 \Rightarrow b=c=2. \\ b+c=-1 \Rightarrow \text{无解}. \end{cases}$$

於是  $a=4$ . 故  $a^4+b^4+c^4=288$ .

12. 答案：（1）可以 （2）900毫米长14根,745毫米长10根,1385毫米长2根.

**解答：**（1）根據題目要求，如果可以從三種木方各選出一些根，鋸出十個玩具的所需木方並且不能剩餘各種長度的木方，則最後鋸出的木方的長度只能是 260 毫米與 370 毫米，並且數量分別是 30 根與 40 根。根據說明，“一個木方被鋸一次要得到兩個長度大於 0 的木方”，則一個木方被切割的次數是等於鋸出的木方的數目-1. 設一根木方的長度為  $L$ ，鋸出長度為 260 毫米與 370 毫米木方分別為  $n, m$  根，則有關係式： $260n + 370m + 5(m + n - 1) = L$  (\*)

針對三種木方有下面鋸的方法並且只有這三種鋸的方法：

$$900 = 260 \times 2 + 370 + (2 + 1 - 1) \times 5,$$

$$745 = 370 \times 2 + 5 \times (2 - 1)$$

$$1385 = 260 + 370 \times 3 + 5 \times (3 + 1 - 1)$$

設用長度為 900 毫米、750 毫米、1385 毫米的標準木方分別是  $x$  根、 $y$  根、 $z$  根.

由於所以，

$$\begin{cases} 2x + z = 30 \cdots \cdots (1) \\ x + 2y + 3z = 40 \cdots \cdots (2) \end{cases}$$

(2)  $\times 2 -$  (1)：

$$4y + 5z = 50$$

$$\therefore z = \frac{50 - 4y}{5} = 10 - \frac{4y}{5}$$

解得三組整數解：

$$(1) \begin{cases} x = 10 \\ y = 0 \\ z = 10 \end{cases}, (2) \begin{cases} x = 12 \\ y = 5 \\ z = 6 \end{cases}, (3) \begin{cases} x = 14 \\ y = 10 \\ z = 2 \end{cases}$$

因此問題可以從三種木方各選出一些根，鋸出十個玩具的所需木方並且不能剩餘各種長度的木方。

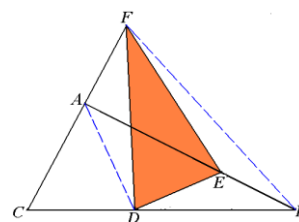
(2) 考慮到鋸的次數最少，因為只有這三種解，分別計算：解(1)鋸了 50 次，解(2)鋸了 47 次，解(3)鋸了 44 次，最小者為解(3)，此時  $x=14, y=10, z=2$ 。

### 三、解答下列各題（每小題 15 分，共 30 分，要求寫出詳細過程）

13. 答案：△ABC 的面积是 2015.

解答：如圖所示，連接  $BF, AD$ . 設△ABC 面積 =  $x$ 。

因為  $CA:AF=4:3$ ，所以△FBA 面積 =  $\frac{3}{4}x$ ，△FBC 面積 =  $x + \frac{3}{4}x = \frac{7}{4}x$ 。



由此和  $CD:DB=2:3$ ，可知：

$$\triangle FBD \text{ 面積} = \frac{7}{4}x \times \frac{3}{5} = \frac{21}{20}x.$$

又由  $AE:EB=2:1$ ，

$$\triangle FBE \text{ 面積} = \frac{3}{4}x \times \frac{1}{3} = \frac{1}{4}x.$$

再由  $AE:EB=2:1$  和  $CD:DB=2:3$ ，

$$\triangle BED \text{ 面積} = \triangle ABD \text{ 面積} \times \frac{1}{3} = \triangle ABC \text{ 面積} \times \frac{3}{5} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{5}x.$$

因此，△FBD 面積－△FBE 面積－△BED 面積=△DEF 的面積，可得：

$$\frac{21}{20}x - \frac{1}{4}x - \frac{1}{5}x = 1209,$$

解上述方程， $\frac{3}{5}x = 1209, x = 2015$ .

14. 答案：0, 6

解答：首先  $n=0$  時， $n^2+2^n=1$  為完全平方數。

當  $n>0$  時，記  $n^2+2^n=b^2$ ， $b$  為正整數，則

$$2^n = b^2 - n^2 = (b+n)(b-n).$$

令

$$b+n=2^s, \quad b-n=2^t, \quad s>t\geq 0, \quad s+t=n. \quad \textcircled{1}$$

其中  $s, t$  是非負整數，則

$$2n = 2^s - 2^t = 2 \times 2^{s-1} - 2^t = 2^{s-1} + 2^{s-1} - 2^t \geq 2^{s-1}, \quad n > 2^{s-2}.$$

根據  $s>t$ ， $s+t=n$ ，則  $2s>n$ ，

$$s > 2^{s-3}.$$

這個不等式只有在  $s=1, 2, 3, 4, 5$  時成立。

由①得

$$s+t=2^{s-1}-2^{t-1}. \quad \textcircled{2}$$

若  $s=1$ ，由②得  $-t=2^{t-1}$ 。因為  $-t\leq 0, 2^{t-1}>0$ ，所以沒有  $t$  使得②成立。

若  $s=2$ ，由②得  $-t=2^{t-1}$ 。因為  $-t\leq 0, 2^{t-1}>0$ ，所以沒有  $t$  使得②成立。

若  $s=3$ ，由②得  $1-t=2^{t-1}$ 。整數  $t$  只能取  $0, 1, 2$ ，都不能使得②成立。

當  $s=4$  時，由②得  $4-t=2^{t-1}$ 。整數  $t$  只能取  $0, 1, 2, 3$ ，只有  $t$  為  $2$  時②成立。

此時， $n=6, b=10$ 。

若  $s=5$ ，由②得  $11-t=2^{t-1}$ 。因為  $2^{t-1}$  為偶數，所以  $t$  只能取奇數  $1, 3$ ，均

不能使得 ②成立

所以, 使得  $n^2 + 2^n$  為完全平方數的  $n$  的值為 0 和 6.