# 第十九届华罗庚金杯少年数学邀请赛

## 决赛试题参考答案（初一组）

## 一、填空（每题 10 分，共 80 分）

| 题号 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 答案 | −2 | 17.5, 9 | 2 | 12 | 2 | 60 | 3 | 2040 |

## 二、解答下列各题（每题 10 分，共 40 分，要求写出简要过程）

**9. 答案：** A 处

**解答.** 设仓库离 B 处 $x$ 公里 (靠 C 处)，则运费为：

$$1.5\times 50(50+x)+15x+60(120-x)=10950+30x\geq 10950\text{元}.$$

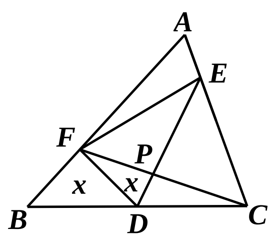
设仓库离 B 处 $x$ 公里 (靠 A 处)，则运费为：

$$1.5\times 50(50-x)+10x+60(120+x)=10950-5x\geq 10700\text{元}.$$

因此，应该将仓库建在 A 处.

**10. 答案：** 3

**解答**. 如图所示，连接 $EF, DF$. 设 $S_{\Delta BDF}=x$. 因为 $D$ 为 $BC$ 的中点，所以 $S_{\Delta FDC}=x$，$S_{\Delta CFB}=2x$.




因为 $AF=2BF$，所以 $\dfrac{S_{\Delta CAF}}{S_{\Delta CFB}}=\dfrac{AF}{BF}=2$，得 $S_{\Delta CAF}=4x$.

因为 $\dfrac{S_{\Delta AFE}}{S_{\Delta EFC}}=\dfrac{AE}{CE}=\dfrac{1}{3}$，所以 $S_{\Delta EFC}=3x$.

因为 $\dfrac{S_{\Delta EFP}}{S_{\Delta DPF}}=\dfrac{S_{\Delta CEP}}{S_{\Delta CPD}}=\dfrac{PE}{DP}$，所以 $\dfrac{PE}{DP}=\dfrac{S_{\Delta EFC}}{S_{\Delta FDC}}=3$.

**11. 证明.** 如果结论不成立，则这 14 所学校的选手数彼此互不相同. 也就是这 14 所学校的选手数是彼此不同的 14 个正整数. 而 14 个彼此不同的正整数之和最小为

$$1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11+12+13+14=105,$$

$105>104$，得出矛盾.

**12. 答案：**2353, 2347.

**解答**. 设这个四位数为$\overline{xyzw}$. 首先，$x=2$. 因为 $0\le y,z,w\le 9$, 若 $x=1$，则有

$$0\le 2(y+z+w)\le 54,\quad 1999+54+2=2055,$$

与条件不符. 另一方面 $x$ 不能大于 2. 于是，$\overline{xyzw}=\overline{2yzw}$，即有

$$2000+100y+10z+w+4+2y+2z+2w=2379.$$

得到

$$102y+12z+3w=375.$$

容易验证，$y\ne 1, 2$. 因此，$y=3$. 于是

$$12z+3w=69,\quad z=\frac{69-3w}{12}.$$

整数解： $w=3, z=5;\quad w=7, z=4$.

所求四位数为：2353, 2347. 经验证，都符合要求.

## 三、解答下列各题（每小题 15 分，共 30 分，要求写出详细过程）

**13. 答案：** $a=2, b=2, c=29$；$a=11, b=5, c=11$ 或者 $a=13, b=3, c=13$

**解答**. 因为$a\mid bc$，所以$a\mid b$或者$a\mid c$. 因为 $a$, $b$, $c$ 都是质数，所以$a=b$或者$a=c$.

① 当$a=b$时，

$$15a+7a^2+ac=a^2c,$$

所以

$$15+7a+c=ac,$$

$$(a-1)(c-7)=22=11\times 2.$$

若 $\begin{cases}a-1=11\\c-7=2\end{cases}$，得 $\begin{cases}a=12\\c=9\end{cases}$，与题意不符;

若 $\begin{cases}a-1=2\\c-7=11\end{cases}$，得 $\begin{cases}a=3\\c=18\end{cases}$，也与题意不符;

若 $\begin{cases}a-1=22\\c-7=1\end{cases}$，得 $\begin{cases}a=23\\c=8\end{cases}$，也与题意不符.

若 $\begin{cases}a-1=1\\c-7=22\end{cases}$，得 $\begin{cases}a=2\\c=29\end{cases}$，与题意相符，$a=2, b=2, c=29$ 为一个答案.

②当 $a=c$ 时,

$$15a+7ab+ac=a^2b,$$

所以 $15a+8ab=a^2b$，由 $15+8b=ab$ 变化得到

$$(a-8)b=1\times 15=3\times 5.$$

若 $\begin{cases}a-8=1\\b=15\end{cases}$，得 $\begin{cases}a=9\\b=15\end{cases}$，与题意不符;

若 $\begin{cases}a-8=15\\b=1\end{cases}$，得 $\begin{cases}a=23\\b=1\end{cases}$，与题意不符;

若 $\begin{cases}a-8=3\\b=5\end{cases}$，得 $\begin{cases}a=11\\b=5\end{cases}$，与题意相符，$a=11, b=5, c=11$ 为一个答案;

若 $\begin{cases}a-8=5\\b=3\end{cases}$，得 $\begin{cases}a=13\\b=3\end{cases}$，与题意相符，$a=13, b=3, c=13$ 为一个答案..

**14. 答案：**100

**解答**. 记

$$\begin{cases} a_1 \ge a_2 \ge a_3 \ge \cdots \ge a_{10}, & (1) \\ a_1 + a_2 \le 10, & (2) \\ a_3 + a_4 + \cdots + a_9 + a_{10} \le 10, & (3) \end{cases}$$

由 (2) 和 (3) 得

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{10} \le 20.$$

根据 (1) 和 (2),

$$\begin{aligned} & a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \cdots + a_{10}^2 \le (10 - a_2)^2 + a_2^2 + a_3^2 + \cdots + a_{10}^2 \\ & = 10^2 - 20a_2 + 2a_2^2 + a_3^2 + \cdots + a_{10}^2 \\ & \le 10^2 - (a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{10})a_2 + 2a_2^2 + a_3^2 + \cdots + a_{10}^2 \\ & = 100 + (a_2^2 - a_1a_2) + (a_3^2 - a_3a_2) + (a_4^2 - a_4a_2) + \cdots + (a_{10}^2 - a_{10}a_2) \\ & = 100 + ((a_2 - a_1)a_2) + (a_3 - a_2)a_3 + (a_4 - a_2)a_4 + \cdots + (a_{10} - a_2)a_{10} \le 100, \end{aligned}$$

并且等号成立当且仅当乘积

$$(a_2 - a_1)a_2, (a_3 - a_2)a_3, \cdots, (a_{10} - a_2)a_{10}$$

都等于0.

取

$$a_1 = 10, \quad a_2 = a_3 = a_4 = \cdots = a_{10} = 0,$$

或

$$a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 5, \quad a_5 = a_6 = \cdots = a_{10} = 0,$$

则 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{10}$ 都满足 (1), (2), (3), 并且

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \cdots + a_{10}^2 = 100.$$

综和上述讨论，$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \cdots + a_{10}^2$ 的最大值是100.