二〇一二年暨南大学、华侨大学联合招收

港澳台、海外华侨、华人及其它外籍学生入学考试题目

科目：数学

答卷时间：2 小时

一．选择题：本大题共 15 小题，每小题 4 分，共 60 分，每小题所列四个选项中只有一个是正确的，把你的选择按题号填入答题纸。

1. 不等式 $5-x<2$ 的解是

A. $x>1$　　B. $x\geq 1$　　C. $x\leq 3$　　D. $x>3$

2. 若关于 x 的方程 $ax=2$ 无解，则实数 a 的值为

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. -2

3. 若函数 $f(x)=x^2+ax+b$ 在 $x=1$ 处取得最小值 3，则

A. $a=-2,b=3$　　B. $a=-2,b=4$

C. $a=2,b=1$　　D. $a=-1,b=3$

4. 已知常数 $a,b>0$ 且都不等于 1，如果 $f(x)=a^x$ 是增函数，$g(x)=\log_b x$ 是减函数，则一定有

A. $a^2<b^2$　　B. $\log_b a>0$　　C. $3^a>3^b$　　D. $ab>1$

5. 下列函数中，定义域为全体实数的是

A. $y=\sqrt{x^2+x-2}$　　B. $y=\dfrac{1}{\lg|x-1|}$

C. $y=\tan x$　　D. $y=5^{x+2}$

6. 记 S_n 为等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，且 $\dfrac{S_9}{S_3}=3$，则 $\dfrac{a_9}{a_3}=$

A. 3　　B. -2 或 1　　C. 4 或 1　　D. 1

7. 已知 α 是第三象限角，则 $\cos\alpha\sqrt{1-\sin^2\alpha}+\sin\alpha\sqrt{1-\cos^2\alpha}=$

A. 1　　B. -1　　C. $\cos 2\alpha$　　D. $-\cos 2\alpha$

8. 已知 $\tan x=-\frac{1}{2}$，则 $2\sin x\cos x=$

A. $-\frac{4}{5}$　　B. -3　　C. $-\frac{7}{5}$　　D. $-\frac{11}{5}$

9. 平面直线 l_1 与 l_2 相互垂直，l_1 的斜率为 $\tan\theta(\neq 0)$，则 l_2 的斜率为

A. $\cot\theta$　　B. $\tan(\theta+\pi)$　　C. $-\tan\theta$　　D. $\tan(\theta+\frac{\pi}{2})$

10. 已知向量 $\vec{a}=(1,-3)$, $\vec{b}=(5,0)$，则 $3\vec{a}-2\vec{b}=$

A. $(7,-9)$　　B. $(-7,-9)$　　C. $(-7,9)$　　D. $(7,9)$

11. 已知直线 $y=kx+b$ 经过点 $(0,3)$，且与圆 $x^2+y^2+2y-3=0$ 有两个交点，则 k 的取值范围是

A. $(-\infty,-\sqrt{3})\cup(\sqrt{3},+\infty)$　　B. $(-\sqrt{3},\sqrt{3})$

C. $(-\infty,-\sqrt{3}]\cup[\sqrt{3},+\infty)$　　D. $[-\sqrt{3},\sqrt{3}]$

12. 若一条直线平行于一个平面，则垂直于这个平面的直线一定与这条直线

A. 平行　　B. 异面　　C. 垂直　　D. 相交

13. 假设在 100 件产品中，有 3 件是次品，从产品中任取 5 件，其中至少有 2 件是次品的抽法有_____种

A. $C_3^2C_{97}^3$　　B. $C_3^2C_{97}^3+C_3^3C_{97}^2$

C. $C_{100}^5-C_{97}^5$　　D. $C_{100}^5-C_3^1C_{97}^4$

14. 将 4 个球随机放进 3 个空盒，则所有球都在前两个盒中、但不是全在一个盒子里的概率为

A. $\frac{80}{81}$　　B. $\frac{2}{3}$　　C. $\frac{16}{81}$　　D. $\frac{14}{81}$

15. 已知定义域为$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$的函数$f(x)$是偶函数，并且在$(-\infty,0)$上为增函数，若$f(-3)=0$，则$\frac{f(x)}{x}<0$的解集为

A. $(-3,\ 0)\cup(3,\ +\infty)$　　B. $(-3,\ 0)\cup(0,\ 3)$

C. $(3,\ +\infty)$　　D. $(-\infty,\ 3)$

答案：DABCD CBADB ACBDA

二、填空题：本大题共6小题，每小题4分，共24分，把答案按题号填入答题纸。

16. 已知$f(\ln x)=2x+5$，则$f(x)=$ $\underline{2e^x+5}$。

17. 在坐标平面上，到$A(5,0)$和$B(2,-6)$两点距离相等的点P的轨迹方程是 $\underline{2x+4y+5=0}$。

18. 已知n为正整数，则$\sqrt{n+3}-\sqrt{n}$与$\sqrt{n+4}-\sqrt{n+1}$的大小关系是 $\underline{\sqrt{n+3}-\sqrt{n}>\sqrt{n+4}-\sqrt{n+1}}$。

19. 已知α,β是一个三角形的两个内角，且$\tan\alpha,\tan\beta$是方程$x^2-3x+2=0$的两个根，则$\tan(\alpha+\beta)=$ $\underline{-3}$。

20. 不等式$\log_{\frac{1}{3}}(2x-3)>\log_{\frac{1}{3}}(x+1)$的解为 $\underline{\frac{3}{2}<x<4}$。

21. 在正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，线段AB_1与BC_1的夹角是 $\underline{\frac{\pi}{3}}$。

三、解答题：本大题满分66分。解答题应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

22. （本小题满分 12 分）

某蒸汽机上的飞轮直径为 1.2m，每分钟按逆时针方向旋转 300 转，求：

(1) 飞轮每秒钟转过的弧度数；

(2) 轮周上的一点每秒钟经过的弧长。

解：（1）∵飞轮半径 $r=0.6m$，每秒钟逆时针旋转 5 转

∴飞轮每秒钟转过的弧度数是 $5\times2\pi=10\pi$

----------6 分

（2）轮周上一点每秒钟经过的弧长 $l=10\pi\times0.6=6\pi$ (m)

----------12 分

23. （本小题满分 12 分）

设ΔABC的三个角 A, B, C 所对应的边分别为 a, b, c，已知边 $c=10$，又知 $\frac{\cos A}{\cos B}=\frac{b}{a}=\frac{4}{3}$，求 a, b。

解答：由 $\frac{\cos A}{\cos B}=\frac{b}{a}$，$\frac{\sin B}{\sin A}=\frac{b}{a}$，可得 $\frac{\cos A}{\cos B}=\frac{\sin B}{\sin A}$，

----------3 分

变形为 $\sin A\cos A=\sin B\cos B$，∴$\sin 2A=\sin 2B$,

----------6 分

又∵$a\neq b$，∴$2A=\pi-2B$，∴$A+B=\frac{\pi}{2}$. ∴△ABC 为直角三角形.

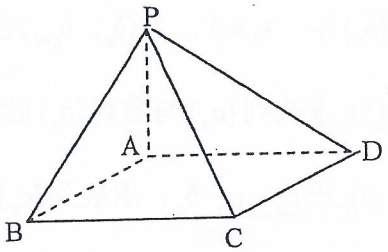
----------9 分

由 $a^2+b^2=10^2$ 和 $\frac{b}{a}=\frac{4}{3}$，解得 $a=6$，$b=8$。

----------12 分

24. （本小题满分 12 分）

如图 1，已知四棱锥 $P-ABCD$ 的底面是面积为 $4\ \text{cm}^2$ 的矩形，$PA\perp AB$，$PA\perp AD$，平面 PBC 和平面 PCD 与底面分别成 60° 和 30° 角，求四棱锥 $P-ABCD$ 的体积。



解：设底面边长 $AB=a, AD=b$

由 PA⊥AB，PA⊥AD 知 $PA\perp$ 底面 $ABCD$，

于是 $BC\perp PA, CD\perp PA$，

而 $BC\perp AB, CD\perp AD$ 得

$BC\perp$ 面 PAB，$CD\perp$ 面 PAD

因此 $\angle PBA=60^\circ, \angle PDA=30^\circ$

----------5 分

$PA=a\tan 60^\circ=b\tan 30^\circ$ （1）

$ab=4$ （2）

由（1）（2）得

$$a=\frac{2}{\sqrt{3}}, b=\frac{6}{\sqrt{3}}, PA=2\,(\text{cm})$$

----------9 分

四棱锥 P—ABCD 的体积为

$$V=\frac{1}{3}a\cdot b\cdot PA=\frac{8}{3}\,(cm^3)。$$

----------12 分

25. （本小题满分 15 分）（选考历史或地理的考生做题目 I，不必做题目 II；选考物理、化学或生物的考生做题目 II，不必做题目 I）

I. 已知数列$\{a_n\}$中，$a_1=1$, $a_{n+1}=1-\frac{1}{4a_n}$, $b_n=\frac{2}{2a_n-1}$，其中$n\in N$。

(1) 求证：数列$\{b_n\}$是等差数列；

(2) 求数列$\{a_n\}$的通项公式。

II. 已知数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，且a_n是S_n与 2 的等差中项，在数列$\{b_n\}$中，$b_1=1$，点$(b_n,\ b_{n+1})$在直线$x-y+2=0$上。

(1) 求数列$\{a_n\}$与数列$\{b_n\}$的通项公式；

(2) 设$c_n=a_n\cdot b_n$，求数列$\{c_n\}$的前n项和T_n。

题目 I 解答：

（1）由于$b_{n+1}-b_n=\frac{2}{2a_{n+1}-1}-\frac{2}{2a_n-1}$

$$=\frac{4a_n}{2a_n-1}-\frac{2}{2a_n-1}=2(n\in N)$$

从而数列$\{b_n\}$是等差数列。

----------5 分

（2） 由$a_1=1$得$b_1=\frac{2}{2a_1-1}=2$得

$$b_n=2+(n-1)\times 2=2n$$

----------9 分

从而由$b_n=\frac{2}{2a_n-1}$得，

$$2a_n-1=\frac{2}{b_n}=\frac{1}{n}$$

$$a_n=\frac{n+1}{2n}$$

----------15 分

题目 II 解答：

（1）由题意知的前 n 项和为 $S_n+2=2a_n$，

则 $S_n=2a_n-2$，$S_{n-1}=2a_{n-1}-2\ (n\geq 2,n\in N)$，两式相减得，$a_n=2a_{n-1}$

又由 $a_1=S_1=2a_1-2$ 得 $a_1=2$。

于是 $a_n=2^n$。

----------4 分

由于点 $(b_n,\ b_{n+1})$ 在直线 $x-y+2=0$ 上，则 $b_n-b_{n+1}+2=0$，

即 $b_{n+1}-b_n=2$，则数列 $\{b_n\}$ 是公差为 2 的等差数列，

于是 $b_n=2n-1$。

----------7 分

（2）由（1）得

$T_n=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n=1\times 2+3\times 2^2+5\times 2^3+\cdots+(2n-1)\times 2^n$

$2T_n=1\times 2^2+3\times 2^3+5\times 2^4+\cdots+(2n-1)\times 2^{n+1}$

两式相减得

$-T_n=1\times 2+2^3+2^4+\cdots+2^{n+1}-(2n-1)\times 2^{n+1}$

所以

$T_n=(2n-3)\times 2^{n+1}+6$。

----------15 分

26.（本小题满分 15 分）（选考历史或地理的考生做题目 I，不必做题目 II；选考物理、化学或生物的考生做题目 II，不必做题目 I）

I. 如图 2，椭圆 E 经过点 $A(2,3)$，对称轴为坐标轴，焦点 F_1，F_2 在 x 轴上，离心率 $e=\frac{1}{2}$。

(1) 求椭圆 E 的方程；

(2) 求 $\angle F_1AF_2$ 的角平分线所在直线的方程。

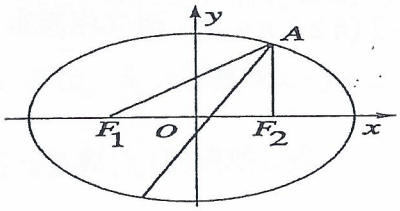


图 2

II. 已知椭圆 C 的中心在原点，一个焦点 $F(-2,\ 0)$，且长轴长与短轴长的比是 $2:\sqrt{3}$.

(1) 求椭圆 C 的方程；

(2) 设点 $M(m,0)$ 在椭圆 C 的长轴上，点 P 是椭圆上任意一点．当 $|\overrightarrow{MP}|$ 最小时，点 P 恰好落在椭圆的右顶点，求实数 m 的取值范围。

题目 I 解答：

(1) 由题意可设椭圆方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$

$\because e=\frac{1}{2}$，即 $\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$，$\therefore a=2c$

----------2 分

又 $b^2=a^2-c^2=3c^2$

$\therefore$ 椭圆方程为 $\frac{x^2}{4c^2}+\frac{y^2}{3c^2}=1$.

----------5 分

又∵椭圆过点 $A(2,3)$ ∴ $\frac{4}{4c^2}+\frac{9}{3c^2}=1$，解得 $c^2=4$，

∴椭圆方程为 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$.

----------8 分

(2) 由(1)知 F1(－2,0)，F2(2,0)，

∴直线 AF1 的方程 $y=\frac{3}{4}(x+2)$，即 3x－4y＋6＝0，

直线 AF2 的方程为 x＝2.

----------10 分

设 P(x，y)为角平分在线任意一点，则点 P 到两直线的距离相等.

即 $\frac{|3x-4y+6|}{5}=|x-2|$

∴3x－4y＋6＝5(x－2)或 3x－4y＋6＝5(2－x)

即 x＋2y－8＝0 或 2x－y－1＝0.

----------13 分

由图形知，角平分线的斜率为正数，故所求 $\angle F_1AF_2$ 的平分线所在直线方程为 2x－y－1＝0.

----------15 分

题目 II 解答：

(1) 设椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$

由题意 $\begin{cases} a^2=b^2+c^2 \\ a:b=2:\sqrt{3}, \\ c=2 \end{cases}$

----------3 分

解得 $a^2=16, b^2=12$。所以椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$.

----------6 分

(2) 设 $P(x, y)$ 为椭圆上的动点，由于椭圆方程为 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$ ，故 $-4\leqslant x\leqslant 4$.

----------9 分

因为 $\overrightarrow{MP}=(x-m, y)$，

所以 $|\overrightarrow{MP}|^2=(x-m)^2+y^2=(x-m)^2+12\times(1-\frac{x^2}{16})$

$=\frac{1}{4}x^2-2mx+m^2+12=\frac{1}{4}(x-4m)^2+12-3m^2$.

因为当 $|\overrightarrow{MP}|$ 最小时，点 P 恰好落在椭圆的右顶点，即当 $x=4$ 时，$|\overrightarrow{MP}|^2$ 取得最小值．而 $x\in[-4,4]$，故有 $4m\geqslant 4$，解得 $m\geqslant 1$.

----------12 分

又点 M 在椭圆的长轴上，即 $-4\leqslant m\leqslant 4$. 故实数 m 的取值范围是 $m\in[1,4]$。

----------15 分

题目结束