第十八届华罗庚金杯少年数学邀请赛

决赛试题 A 参考答案（初一组）

一、填空（每题 10 分，共 80 分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	$-\frac{1624}{275427}$	129°	61	$\frac{21}{4}$	660	$\frac{9000}{37}$	$-\frac{85}{9}$	24

二、解答下列各题（每题 10 分，共 40 分，要求写出简要过程）

9. 解答：其中的五个算式如下

$$4^{4+(-4)}+4=5,$$
$$(-4)^{4+(-4)}+4=5,$$
$$\frac{4\times(-4)+(-4)}{-4}=5,$$
$$\frac{(-4)\times(-4)+4}{4}=5,$$
$$\frac{4\times4+4}{4}=5$$

10. 答案： $x=\frac{25}{18},\frac{27}{18},\frac{29}{18}$

解答： 由于

$$x+2-1<[x+2]\le x+2, 5x+1-1<[5x+1]\le 5x+1$$

所以

$$6x+1<[x+2]+[5x+1]=9x-\frac{5}{2}\le 6x+3$$

由此得

$$\frac{7}{6}<x\le\frac{11}{6}$$

于是

$$9x-\frac{5}{2}=9,10,11,12,13,14$$

分别解方程：

（1）$9x-\frac{5}{2}=9$，解得：$x=\frac{23}{18}$.

验算：左=3+7=10，右=$\frac{23-5}{2}=9$，左≠右，$x=\frac{23}{18}$不是解.

（2）$9x-\frac{5}{2}=10$，得：　$x=\frac{25}{18}$.

验算：左=3+7=10，右=$\frac{25}{2}-\frac{5}{2}=10$，左=右，$x=\frac{25}{18}$是解.

（3）$9x-\frac{5}{2}=11$，解得：　$x=\frac{27}{18}$

验算：左=3+8=11，右$=\frac{27}{2}-\frac{5}{2}=11$，左=右，$x=\frac{27}{18}$是解.

（4）$9x-\frac{5}{2}=12$，解得：$x=\frac{29}{18}$

验算：左=3+9=12，右$=\frac{29}{2}-\frac{5}{2}=12$，左=右，$x=\frac{29}{18}$是解.

（5）$9x-\frac{5}{2}=13$，解得：$x=\frac{31}{18}$

验算：左=3+9=12，右$=\frac{31}{2}-\frac{5}{2}=13$，左≠右，$x=\frac{31}{18}$不是解.

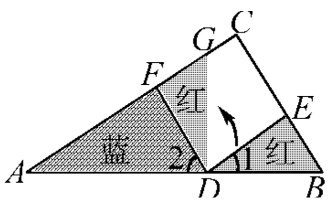
（6）$9x-\frac{5}{2}=14$，解得：$x=\frac{33}{18}$

验算：左=3+10=13，右$=\frac{33}{2}-\frac{5}{2}=14$，左≠右，$x=\frac{33}{18}$不是解.

因此，解是：$x=\frac{25}{18},\frac{27}{18},\frac{29}{18}$

11. 答：144 平方厘米.

解：如图，以 *D* 为中心，逆时针旋转三角形 *BDE*，使 *DE* 和 *DF* 重合，*BE* 和 *FG* 重合，三角形 *BDE* 和三角形 *DFG* 重合.（即割下三角形 *BDE* 补到三角形 *DFG* 的位置）



由于∠*EDF*＝90°，所以∠1+∠2＝90°，所以∠*ADG* 是直角，三角形 *ADG* 是直角三角形，它的直角边 *AD*=20，*BD*=*DG*=15，由勾股定理可得斜边 *AG*=25. 此时正方形的边长 *DF* 恰是直角三角形 *ADG* 中斜边 *AG* 上的高，

所以 $\frac{1}{2}\times 25\times DF=\frac{1}{2}\times 15\times 20$，解得 $DF=12$，

因此黄色正方形纸片面积是$12^2=144$（平方厘米）

12. 答案：13.

解答：方法 1:

把$c=5d+10$代入$b=3c-18$，得到$b=3(5d+10)-18=15d+12$，代入

$a=2b+8$，$a=2(15d+12)+8=30d+32$，

所以$|d+7a|=|d+210d+224|=|211d+224|$，

因为d为整数，所以$d=-1$时，$|d+7a|$取得最小值，此时值为 13.

方法 2：

因为$c=\frac{b}{3}+6$ 所以, b 是 3 的倍数,

因为$d=\frac{c}{5}-2$所以, c 是 5 的倍数,

$d+7a=\frac{c}{5}-2+7a=\frac{b}{15}+\frac{6}{5}-2+7a=\frac{b}{15}+\frac{6}{5}-2+14b+56=\frac{b+3}{15}+14b+55$

由 a, b, c, d 是整数,

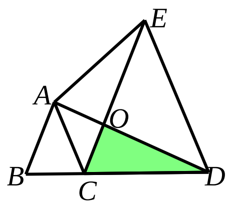
3 整除 b, 5 整除 $b+3$, 令 $b=3p$, 其中 p 为 5 的倍数, 所以上式等于

$\frac{p+1}{5}+42p+55=d+7a$, 其中 p 为 5 的倍数,

当 p 增时,$d+7a$ 也增, $p=-1$ 时, $d+7a=13$, $p=-6$ 时, $d+7a=-198$, $p=4$ 时, $d+7a=224$, 所以, $d+7a$ 的绝对值的最小值等于 13.

三、解答下列各题（每小题 15 分，共 30 分，要求写出详细过程）

13. 答案：42 cm2



解答：记三角形COD的面积为$x$cm2.

因为等腰三角形的顶角相等，所以

$\angle ACB = \angle EDC$，$\angle ABC = \angle ECD$.

所以 $AC // DE$，$AB // CE$.

所以 $S_{\Delta AOE} = S_{\Delta COD}$.

又 $\dfrac{OC}{CE} = \dfrac{S_{\Delta COD}}{S_{\Delta CDE}}$，$\dfrac{OE}{CE} = \dfrac{S_{\Delta AOE}}{S_{\Delta EAC}} = \dfrac{S_{\Delta COD}}{S_{\Delta EAC}}$，

因为三角形 EAC 在边 AC 上的高和三角形 CDE 在边 DE 上的高相等,

所以 $\dfrac{OC}{OE} = \dfrac{S_{\Delta EAC}}{S_{\Delta CDE}} = \dfrac{AC}{DE} = \dfrac{1}{2}$，可以得到 $OE = 2OC$.

所以 $S_{\Delta CDE} = 3S_{\Delta OCD} = 3x$，$S_{\Delta EAC} = \dfrac{1}{2}S_{\Delta CDE} = \dfrac{1}{2}(S_{\Delta COD} + S_{\Delta ODE}) = \dfrac{3}{2}x$.

因为 $\dfrac{S_{\Delta AOC}}{S_{\Delta AOE}} = \dfrac{OC}{OE} = \dfrac{1}{2}$，所以 $S_{\Delta AOC} = \dfrac{1}{2}S_{\Delta AOE} = \dfrac{1}{2}S_{\Delta COD} = \dfrac{1}{2}x$.

因为 $AB // CE$，所以 $\dfrac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta ACE}} = \dfrac{AB}{CE} = \dfrac{1}{2}$，

即 $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}S_{\Delta ACE} = \dfrac{1}{2}(S_{\Delta AOC} + S_{\Delta OAE}) = \dfrac{3}{4}x$.

所以 $S_{ABCDE} = S_{\Delta ABC} + S_{\Delta ACE} + S_{\Delta COD} + S_{\Delta DOE} = \dfrac{3}{4}x + \dfrac{3}{2}x + x + 2x$.

因为 $x = 8$，即四边形 $ABDE$ 的面积为 **42cm2.**

14. 答案：（1）30

解答：记红球、黄球和蓝球分别分了 i, j, k 组，每组的盒子数目分别为

$$a_1, a_2, \cdots, a_i,\quad b_1, b_2, \cdots, b_j,\quad c_1, c_2, \cdots, c_k,$$

令 $n = i + j + k$.

1) 因为 $a_1, a_2, \cdots, a_i$，$b_1, b_2, \cdots, b_j$，$c_1, c_2, \cdots, c_k$ 包含了 1 到 30 的所有整数,

所以 $n\geq 30$．另一方面，

$$3\times 155=a_1+a_2+\cdots+a_i+b_1+b_2+\cdots+b_j+c_1+c_2+\cdots+c_k$$
$$\geq 1+2+\cdots+30=\frac{30\times 31}{2}=465=3\times 155,$$

所以 $n=i+j+k=30$，三种分组方法分组的组数之和是 30.

2) 不妨设 $a_1=30$，记这 30 个盒子的组为 A 组．因为 $i+j+k=30$，必有 $j\leq 14$ 或 $k\leq 14$，不妨设 $j\leq 14$．A 组的 30 个盒子分到这不超过 14 个组中去，必有一组至少有三个盒子，这三个盒子里的红球数相同并且黄球数也相同.